Chapitre 3:

Variables aléatoires

Plan du Chapitre

- Section 1: Généralités
- Section 2 : Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie
- Section 3 : Variables aléatoires discrètes et continues
- Section 4: Fonction de répartition
- Section 5: Loi des grands nombres (convergence en probabilité)

Objectifs:

- Définir la notion de la variable aléatoire.

- Etudier les variables aléatoires discrètes et continues.

- Traiter les caractéristiques des variables aléatoires.

- Définir : la notion de l’espérance mathématique, de la variance, de l’écart type.

- L’inégalité de Biénaymé Tchebycheff.

Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 1: Généralités

Trois concepts sont souvent à l'origine des confusions dans la **théorie des probabilités** :

1. **Expérience aléatoire:**

Une expérience est dite aléatoire si l'on ne peut prévoir son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des résultats différents.

Exemple:

-Jeter une pièce de monnaie

2. **Variable aléatoire:**

On définit une **variable aléatoire** lorsqu'on associe **un nombre réel** à **chacun des résultats possibles d'une expérience aléatoire**. Il est possible de définir plusieurs variables aléatoire à partir d'une expérience aléatoire réalisée.

Exemple:

On lance une pièce de monnaie. On peut définir une variable aléatoire en associant (0) au résultat pile et (1) au résultat face et écrire dans ce cas :

- X = 0, si le résultat est pile ;
- X = 1, si le résultat est face.

3. Loi de probabilité

Si à chacun des **nombres associés aux résultats possibles de l'expérience aléatoire**, on associe la **probabilité de sa réalisation**, on dira qu'on a défini une **loi de probabilité**.

Exemple:

Dans l'exemple du lancer de la pièce de monnaie, **la probabilité d'avoir pile est égale à 0,5** et celle d'obtenir **face est aussi égale à 0,5**. La loi de probabilité de la variable aléatoire étudiée est:

Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 1: Généralités

Résultats de l'expérience	**Pile**	**Face**
Les valeurs associées aux résultats possibles **(x_i)**	**0**	**1**
Les probabilités de réalisation des résultats **$P(X=x_i)$**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 1: Généralités

Lors d'une expérience aléatoire, il arrive souvent qu'on s'intéresse plus à une ***fonction* du résultat** qu'au résultat lui-même.

Rappel sur le concept d'une fonction

Soient $\boldsymbol{E}$ **et** $\boldsymbol{F}$ **deux ensembles arbitraires**. On suppose qu'à tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ correspond **un élément unique de** $\boldsymbol{F}$**.**

On dit que cette correspondance est **une fonction** (**ou une application**) de $\boldsymbol{E}$ **dans** $\boldsymbol{F}$, et l'on écrit $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{F}$**.**
On désigne par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ l'élément de F qui correspond à x et on **l'appelle l'image de** $\boldsymbol{x}$ **par** $\boldsymbol{f}$**.**
L'image $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ d'un **sous-ensemble** quelconque $\boldsymbol{A}$ **de** $\boldsymbol{E}$, et **l'image inverse** $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{B})$ d'un sous-ensemble quelconque $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{F}$ sont définies par :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\} \qquad \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{B}) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{B}\}$$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ **est l'ensemble des images des points de** $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{B})$ **est l'ensemble des points dont les images sont dans** $\boldsymbol{B}$**.** En particulier, l'ensemble $f(E)$ de tous les points images est *l'ensemble* image de f.

Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 1: Généralités

Supposons que ***E*** **est l'ensemble fondamental correspondant à une certaine expérience aléatoire**. Dans le vocabulaire probabiliste, ***E* est l'ensemble fondamental Ω**.

Définition d'une variable aléatoire:

Une v.a. $\boldsymbol{X}$ sur un ensemble fondamental Ω **est une fonction de Ω dans l'ensemble ℜ des nombres réels**, telle que l'inverse de chaque intervalle de $\Re$ soit un événement A de Ω .

$$\boldsymbol{X} : \Omega \rightarrow \Re$$

- C'est une fonction qui **associe à chaque résultat** d'une expérience aléatoire ***un nombre***.
- L'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a est appeler **l'ensemble de réalisation** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$.

Remarque :

- Lorsque l'ensemble de réalisation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$ **est <u>fini ou dénombrable</u>**, on dit que la **<u>v.a. est discrète.</u>**
- Lorsque $f(X)$ est **<u>non dénombrable</u>**, on dit que la **<u>v.a. est continue</u>**.

Section 1: Généralités

Exemple :

On jette un dé et on s'intéresse au nombre inscrit sur la face supérieure. On définit alors Ω par:

$$\Omega=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

-Soit **X la variable aléatoire** qui caractérise le résultat de cette expérience aléatoire.

- **X est une variable aléatoire discrète**, elle peut prendre les **valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5, et 6.**

Section 2: Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie

Définition

Une v.a. est discrète si **elle varie de façon discontinue, la variable ne peut prendre que des valeurs entières.**

Pour une même expérience aléatoire, on peut imaginer plusieurs variables aléatoires. Par exemple, l'expérience qui consiste à lancer un dé, on peut associer le nombre de points obtenus, ou associer encore par exemple, le nombre 0 si on obtient un nombre pair et le nombre 1 si on obtient un nombre impair, etc.

Donc on aura :

$$\begin{array}{c} \omega_1 \longrightarrow x_1 \\ \omega_2 \longrightarrow x_2 \\ \omega_3 \longrightarrow x_3 \\ \vdots \longrightarrow \vdots \\ \omega_n \longrightarrow x_n \end{array}$$

On peut écrire aussi :

$$\begin{array}{c} X(\omega_1) = x_1 \\ X(\omega_2) = x_2 \\ X(\omega_3) = x_3 \\ \vdots \quad = \quad \vdots \\ X(\omega_n) = x_n \end{array}$$

Une v.a. génère un ensemble fini de nombres réels x_1, ..., x_n. À chaque nombre $\boldsymbol{x_i}$ on peut faire correspondre $\boldsymbol{p_i}$, la probabilité, dans **l'espace probabilisé** $(\Omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{P})$**,** de l'événement formé par les épreuves qui sont en correspondance avec x_i, on dit aussi que $\boldsymbol{p_i}$ **est la probabilité avec laquelle la v.a prend la valeur** $\boldsymbol{x_i}$ et on écrit $\boldsymbol{p_i = P(X = x_i), i = 1,..,n}$**:**

Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 2: Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie

Définition

- On a $\sum p_i = 1$.
- La donnée des **couples** $(\boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{p_k})$ définit la **loi de probabilité** $\boldsymbol{f}$ de la v.a. **(distribution).**
- $f(x_i) = P(X = x_i), i = 1, .., n$. La loi de probabilité f de X satisfait les conditions suivantes :

$$\boldsymbol{f(x_i) \geq 0} \qquad\qquad \boldsymbol{\sum f(x_i) = 1}$$

Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 2: Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie

1. Espérance mathématique

Si $\boldsymbol{X}$ **est une v.a**. ayant la **loi de probabilité** précédente, **la *moyenne* ou *l'espérance mathématique*** **de** $\boldsymbol{X}$ que l'on note $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})$ ou $\boldsymbol{\mu_x}$, ou encore $\boldsymbol{E}$ ou $\boldsymbol{\mu}$, est définie par :

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + .. + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

Exemple:

On lance **<u>deux</u>** dés parfaitement équilibrés. On définit alors Ω par:

Ω = {(1,1); (1,2); (1,3);…………..(6,6)}

On s'intéresse à **la somme des deux points marqués sur les deux dés**. Cette somme peut prendre les valeurs suivantes: **2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12.**

Soit **X la variable aléatoire** qui caractérise la **somme des deux points marqués sur les deux dés.**

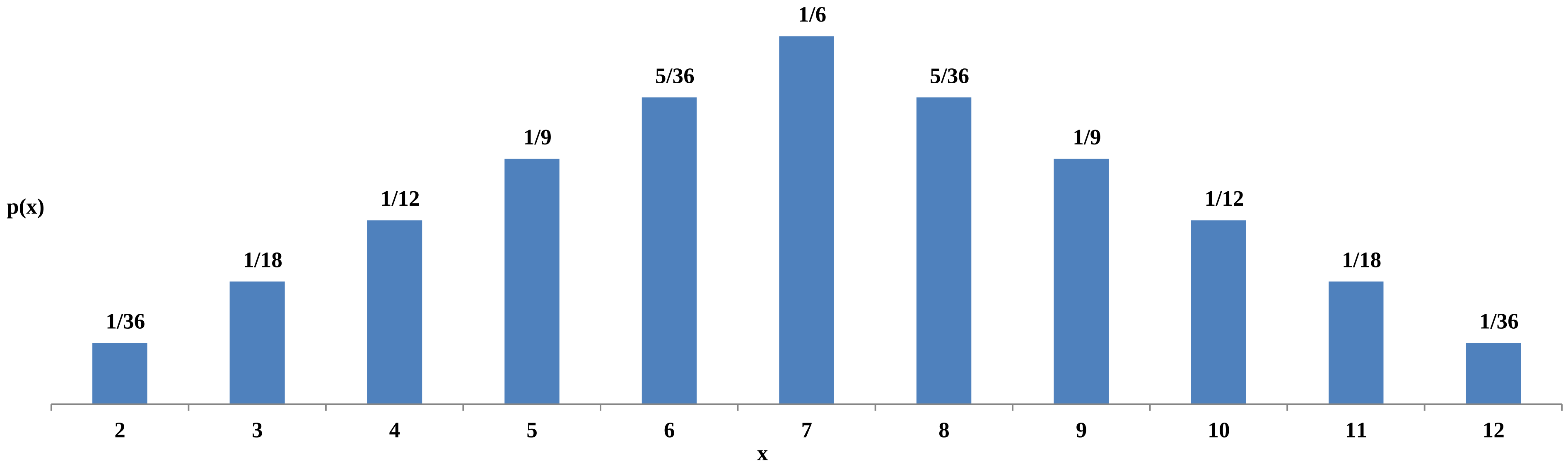
Le nombre total de possibilité est égal à :

Ω = {(1,1); (1,2); (1,3);………;(2,1); (2,2); (2,3);........ (6,6)} = 6^2 =36 possibilités

Section 2: Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie

1. Espérance mathématique

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Total**
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1



Section 2: Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie

1. Espérance mathématique

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$\boldsymbol{E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + .. + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) =}$$

$$2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Section 2: Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie

2. Variance et écart type

La variance d'une v.a. X mesure la dispersion de X notée : $Var(x)$. Soit $f(X)$ la fonction de densité de probabilité. La variance de X et l'écart type sont alors définies par :

$$\boldsymbol{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times p_i - {\mu_X}^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 \times p_i = E[\left(X - E(X)\right)^2]}$$

$$\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{Var(X)}}$$

2. Variance et écart type

Exemple:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Partant de l'exemple précédent, calculons la $\boldsymbol{Var(X)}$ et **l'écart-types de X** :

$$\boldsymbol{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times p_i - {\mu_X}^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 \times p_i = E[(X - E(X))^2]}$$

- $\boldsymbol{Var(X) = \left[2^2 \times \frac{1}{36} + 3^2 \times \frac{2}{36} + 4^2 \times \frac{3}{36} + 5^2 \times \frac{4}{36} + 6^2 \times \frac{5}{36} + 7^2 \times \frac{6}{36} + 8^2 \times \frac{5}{36} + 9^2 \times \frac{4}{36} + 10^2 \times \right.}$

- $\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{5{,}8333} = 2{,}415}$

Section 2: Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie

3. Covariance et la corrélation

Définition

Si X et Y sont des variables aléatoires ayant une **loi de probabilité produit** (**marginale**) (et ayant pour moyennes respectives μ_X et μ_Y), on définit la ***covariance* de *X* et *Y***, $\boldsymbol{Cov(X, Y)}$**,** par :

$$\boldsymbol{Cov(X,Y) = \sum_{i,j} (x_i - \mu_X) \times (y_j - \mu_Y) \times \mathrm{H}(x_i, y_j) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}$$

$$\boldsymbol{Cov(X,Y) = \sum_{i,j} x_i y_j \times \mathrm{H}(x_i, y_j) - \mu_X\, \mu_Y = E(XY) - \mu_X \mu_Y}$$

Remarque: La probabilité du couple (x_i, y_j) est définit par $P(X = x_i, Y = y_j) = \mathrm{H}(x_i, y_j)$. cette dernière est appelée ***la distribution jointe*** ou encore la **loi de *probabilité produit* de *X* et *Y***.
La loi de probabilité produit $\mathrm{H}(x_i, y_j)$ satisfait les conditions suivantes :

$$\mathrm{H}(x_i, y_j) \geq 0 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{H}(x_i, y_j) = 1$$

3. Covariance et la corrélation

Définition

On définit la **corrélation** de X et Y, $\boldsymbol{\rho(X,Y)}$, par :

$$\boldsymbol{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \times \sigma_Y}}$$

Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 2: Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie

4. Variables aléatoires indépendantes

Définition

- On dit que X et Y sont des v.a **indépendantes** si :

$$\boldsymbol{P\left(X = x_i;, Y = y_j\right) = P(X = x_i) \times P\left(Y = y_j\right)}$$

- Si X et Y ont des distributions respectives f' et f, et une loi de **probabilité produit H**, l'équation précédente peut alors s'écrire :

$$\mathbf{H}\left(\boldsymbol{x_i, y_j}\right) = \boldsymbol{f'(x_i) \times f(y_j)}$$

- On dit qu'un nombre fini de variables aléatoires $X, Y, .., Z$ sur un ensemble fondamental Ω **sont indépendantes si** :

$$\boldsymbol{P\left(X = x_i;, Y = y_j \ldots, Z = z_k\right) = P(X = x_i) \times P\left(Y = y_j\right) \times .. \times P(Z = z_k)}$$

Pour toutes les valeurs $x_i, y_j, .., z_k$

4. Variables aléatoires indépendantes

Exemple

Soient X et Y des variables aléatoires ayant la loi de probabilité produit :

X \ Y	**2**	**3**	**4**	**Somme**
1	0,06	0,15	0,09	**0,3**
2	**0,14**	0,35	0,21	**0,7**
Somme	**0,2**	**0,5**	**0,3**	

Les distributions de X et de Y sont :

x	1	2
$f(x)$	**0,3**	**0,7**

y	2	3	4
$g(y)$	**0,2**	**0,5**	**0,3**

On compare par exemple :

$$P(X = 2;, Y = 2) = 0,14 = P(X = 2) \times P(Y = 2) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$$

Donc X **et** Y **sont des variables aléatoires indépendantes.**

5. Opérations sur les variables aléatoires

Définition (opérations sur l’espérance)

- Soit X une v.a. et a un nombre réel. On a :

$$\boldsymbol{E(aX) = a \times E(X)} \qquad \boldsymbol{E(X + a) = E(X) + a}$$

- Soient X et Y des variables aléatoires sur le même ensemble fondamental . On a :

$$\boldsymbol{E(X + Y) = E(X) + E(Y)} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{E(X_1 + X_1 + .. + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_n)}$$

5. Opérations sur les variables aléatoires

Définition (opérations sur la variance)

- Soit X une v.a. et a un nombre réel. On a :

$$\boldsymbol{Var(aX) = a^2 Var(X)} \qquad \boldsymbol{var(X+a) = Var(X)}$$

- Soit X une v.a. de moyenne μ et d'écart type $\sigma_X > 0$, On définit la v.a. **centrée-réduite** $\boldsymbol{X^*}$ correspondant à X par :

$$\boldsymbol{X^* = \frac{X-\mu}{\sigma_X}}$$

$$\boldsymbol{E(X^*) = 0} \qquad \boldsymbol{Var(X^*) = 1}$$

Section 2: Loi de probabilité et indicateurs d'une variable aléatoire finie

5. Opérations sur les variables aléatoires

Définition (situation d'indépendance)

- Soit X et Y des variables aléatoires **indépendantes**

$$\boldsymbol{E(XY) = E(X)E(Y) \qquad Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) \qquad Cov(X,Y) = 0}$$

Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 3: Variables aléatoires discrètes et continues

Variable aléatoire discrète

Définition

Supposons que $\boldsymbol{X}$ **est une v.a**. sur Ω, avec un espace image **infini dénombrable** ; c'est-à-dire $X(\Omega) = \{x_1 , x_2 , \dots \}$. Les variables aléatoires qui possèdent **un espace image fini** sont appelées **v.a. discrètes**.

La loi de probabilité de $\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{f(x_i) = P(X = x_i)}$:

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…
$\boldsymbol{f(x_i)}$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…

On définit l'espérance mathématique $\boldsymbol{E(X)}$, la variance $\boldsymbol{Var(X)}$ **et** l'écart type $\boldsymbol{\sigma_X}$ par:

$$E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \times f(x_1)$$

$$Var(X) = (x_1 - \mu)^2 f(x_1) + (x_2 - \mu)^2 f(x_2) + \cdots$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \times f(x_1)$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Section 3: Variables aléatoires discrètes et continues

Exemple

On cherche l'espérance $\boldsymbol{E(X)}$ de la v.a X, résultat du lancer **d'un dé équilibré**.

Comme : $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = {}^{\mathbf{1}}/_{\mathbf{6}}$, on aura:

$$\boldsymbol{E(X) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots}$$

$$\boldsymbol{E(X) = 1({}^{1}/_{6}) + 2({}^{1}/_{6}) + 3({}^{1}/_{6}) + 4({}^{1}/_{6}) + 5({}^{1}/_{6}) + 6({}^{1}/_{6}) = {}^{7}/_{2}}$$

Section 3: Variables aléatoires discrètes et continues

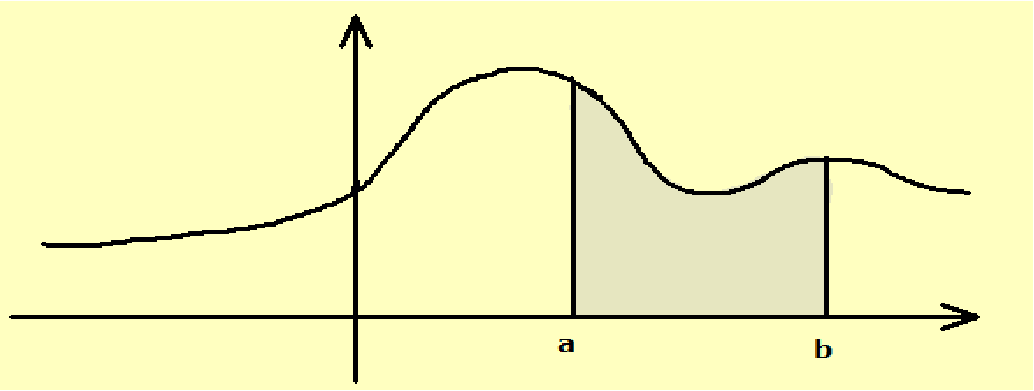
Variable aléatoire continue

Définition

Une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ est dite continue si elle peut prendre toutes ou presque toutes les valeurs d'un intervalle et s'il existe une fonction $\boldsymbol{f}$ **appelée fonction de densité de probabilité**, telle que la probabilité pour que $\boldsymbol{X}$ prenne une certaine valeur dans **un intervalle** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ soit égale à :

$$\boldsymbol{P\ (a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx}$$

Remarque : $f : \mathcal{R} \longmapsto \mathcal{R}$, telle que $P\ (a \leq X \leq b)$ soit égale à l'aire située en dessous de la courbe f, entre $x = a$ et $x = b$ (figure ci-dessous).



Section 3: Variables aléatoires discrètes et continues

Variable aléatoire continue

Définition

la fonction $\boldsymbol{f}$, la distribution ou la loi de probabilité continue de X satisfait les conditions suivantes :

- $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$
- $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$

On définit l'espérance mathématique $\boldsymbol{E(X)}$, la variance $\boldsymbol{Var(X)}$ et l'écart type $\boldsymbol{\sigma_X}$ par :

$$\boldsymbol{E(X) = \int_{\mathcal{R}} x f(x) dx}$$

$$\boldsymbol{Var(X) = \int_{\mathcal{R}} (x-\mu)^2 f(x) dx}$$

$$\boldsymbol{Var(X) = \int_{\mathcal{R}} x^2 f(x) dx - \mu^2 = E\left(X^2\right) - \mu^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{Var(X)}}$$

Variable aléatoire continue

Exemple

Soit X une v.a. continue ayant la distribution :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, x \;\; Si\; 0 \leq x \leq 2 \\ 0\; ailleurs \end{cases}$$

Calculons l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X:

$$E(X) = \int_{\mathcal{R}}^{.} xf(x)dx = \int_0^2 x \times (\frac{1}{2}\, x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}\, x^2 dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{\mathcal{R}}^{.} x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2 \times (\frac{1}{2}\, x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}\, x^3 dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 4: Fonction de répartition

Définition

Soit X une v.a. (**discrète ou continue**). On définit la ***fonction de répartition F* de *X*** par la fonction F : $\Re \longmapsto \Re$ telle que : $\boldsymbol{F_X(a) = P(X \ \leq a)}$ **et** $\mathbf{0 \leq F(X) \leq 1}$

- Si ***X* est une v.a. discrète** ayant une loi de probabilité f, F est la « **fonction en escaliers** » définie par :

$$\boldsymbol{F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)}$$

- Si ***X* est une v.a. continue** ayant une loi de probabilité f :

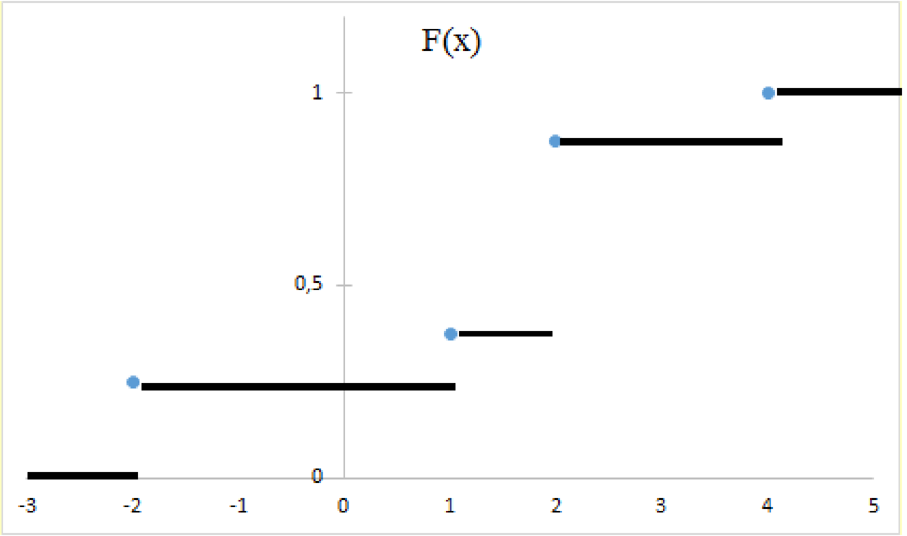
$$\boldsymbol{F_X(t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

- **Dans les deux cas**, F est **monotone croissante**, c.à.d. : $\boldsymbol{F(a) \leq F(b)}$ lorsque $a \leq b$;
- La limite de F à gauche est 0, et sa limite à droite est 1 : $\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0}$ et $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1}$

Section 4: Fonction de répartition

Exemple

Soit X **une v.a. discrète** ayant la distribution suivante :



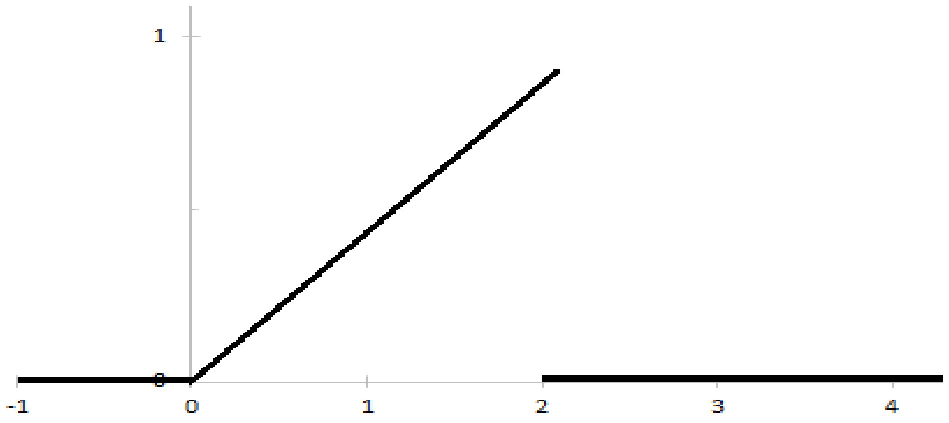
Remarquons que F est **une fonction en escalier**

Section 4: Fonction de répartition

Exemple

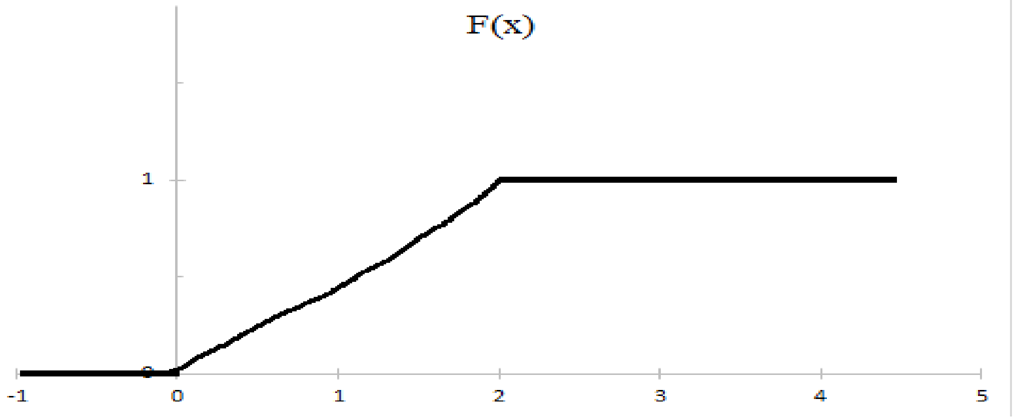
Soit X **une v.a. continue** ayant la distribution suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, x \;\; Si\; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \; ailleurs \end{cases}$$



$$\boldsymbol{F_X(t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\; x < 0 \\ \frac{1}{4}\, x^2 & si\; 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & si\; x > 2 \end{cases}$$



Chapitre 3: Variables aléatoires

Section 5: Loi des grands nombres (convergence en probabilité)

Définition

Inégalité de Tchebycheff

Soit X une v.a. de moyenne μ et d'écart-type σ Alors pour tout $\xi > 0$

$$P(|X-\mu| \geq \xi) \leq \frac{\sigma^2}{\xi^2}$$

Loi des grands nombres

Soit $X_1, X_2, ..,$ **une suite de v.a. indépendantes**, ayant **la même loi de probabilité**, de moyenne μ et variance σ^2. Soit : $\boldsymbol{S_n = (X_1 + X_2 + .. + X_n)/n}$. Alors pour tout $\boldsymbol{\xi > 0}$

$$\lim_{x\to\infty} P(|S_n-\mu| \geq \xi) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to\infty} P(|S_n-\mu| < \xi) = 1$$

- $\boldsymbol{E(S_n) = \mu}$ **et** $\boldsymbol{Var(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}}$ donc d'après **l'inégalité de Tchebycheff** :

$$P(|S_n-\mu| \geq \xi) \leq \frac{\sigma^2}{n\xi^2}$$

Synthèse

Variable aléatoire discrète

- ***Définition*** — v.a. à valeurs discontinues dans un intervalle donné : **dénombrement**
- ***Loi de probabilité*** — **soit l'évènement** $\{X = x_i\}$, **à** x_i **on associe** $P(X = x_i)$ **ou** p_i **alors** $\sum p_i = 1$
- ***Représentation*** — **Diagramme en bâtons**
- ***Espérance***

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- ***Variance***

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - E(X)^2$$

Variable aléatoire continue

- ***Définition*** — **v.a. à valeurs continues dans un intervalle donné : mesure**
- ***Densité de probabilité*** — $x \to f(x)$ **telle que** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- ***Fonction de répartition***

$$F_x(t) = P(\,X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

- ***Représentation*** — **Histogramme**
- ***Espérance***

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

- ***Variance***

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - E(x))^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} {x_i}^2 f(x)\,dx - E(X)^2$$

Indépendance entre variables aléatoires

- ***Loi d'un couple X,Y*** — $H_{ij} = P((X = x_i)\ et\ (Y = y_j))$
- ***Espérance*** — $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- ***Variance*** — $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$

Indépendance

si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Opérations

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Inégalité de de Tchebycheff

$$P(|X - \mu| \geq \xi) \leq \frac{\sigma^2}{\xi^2}$$